Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Хворостіна Ю.В. Концептуальні основи дослідження розподілів випадкових величин, пов'язаних зі знакозмінними рядами Люрота / Юрій Хворостіна // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 2 (5). – С. 73-81.

Khvorostina Yu. Conceptual framework for investigating the distribution of the random variables that are associated with alternating Lüroth series // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 2 (5). – P. 73-81.

УДК 519.21

Юрій Хворостіна
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ПОВ'ЯЗАНИХ ЗІ ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

ВСТУП

У цій роботі висвітлюються основні результати дослідження розподілів випадкових величин (в. в.), пов'язаних зі знакозмінними рядами Люрота. Це випадкові величин, які є: по-перше, сумою знакозмінного ряду Люрота, натуральні елементи якого є незалежними чи марківсько залежними випадковими величинами випадковими величинами з наперед заданими дискретними розподілами; по-друге, випадковими неповними сумами заданих знакозмінних рядів Люрота, коефіцієнти яких є незалежними випадковими величинами або випадковими величинами, які утворюють ланцюг Маркова.

С. Калпазідоу, А. Кнопфмахер і Дж. Кнопфмахер у 1990 році довели, що довільне дійсне число $x \in (0,1]$ можна подати у вигляді знакозмінного ряду:

$$x = \frac{1}{a_1} + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}, \quad a_n \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

або у вигляді його частинної суми, причому кожне ірраціональне число має єдине нескінченне і неперіодичне представлення, а кожне раціональне число або скінченне, або періодичне. Цією ж групою авторів у 1991 році було проведено дослідження деяких метричних властивостей зображення чисел знакозмінними рядами Люрота, зокрема, встановлено існування майже скрізь константи типу Хінчина для ланцюгових дробів, асимптотичної частоти для будь-якого заданого значення цифри і точної оцінки діофантового наближення.

Скорочено (символічно) рівність (1) ми записуватимемо у вигляді $x = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ або $x = \Delta^{\tilde{L}}_{a_1 a_2 \dots a_n (\varnothing)}$ в залежності від того нескінченним чи скінченним є розклад. При цьому $a_n = a_n(x)$ ми називаємо n-тою цифрою числа x, а праву частину цих рівностей

$\widetilde{L}$ *-зображенням* числа x, яке по суті є кодуванням числа x засобами нескінченного алфавіту $A = N$.

Як з'ясувалося, $\widetilde{L}$ -зображення є частинним випадком $\widetilde{Q}_\infty$ -зображення (вперше введеного у роботах М. В. Працьовитого) при певному виборі множини $\{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$, а саме: $q_{k-1} = \frac{1}{k(k+1)}$. Але систематичного викладу тополого-метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій $\widetilde{Q}_\infty$ -зображення дійсних чисел ще до недавна не існувало.

У даній роботі вивчається кілька нових сімей розподілів випадкових величин зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями, використовуючи при цьому методологію, розроблену М. В. Працьовитим та його учнями.

1. Випадкові неповні суми знакозмінного ряду Люрота

Розглянемо випадкову величину

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{A_k}, \quad (2)$$

де $A_1 = a_1, \quad A_{k+1} = a_1(a_1+1)a_2\ldots a_k(a_k+1)a_{k+1}, \quad a_i \in N, \ (\tau_k)$ – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k} = 1 - p_{0k}$ відповідно.

Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера випадкова величина τ має або чисто дискретний, або чисто сингулярний, або чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) розподіл, причому критейрій дискретності є наслідком відомої теореми П. Леві: розподіл τ є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0. \quad (3)$$

Теорема 1.1 *1. Неперервно розподілена випадкова величина*

$$\tau_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{2^{k-1}} \equiv \Delta^{\overline{2}}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_k\ldots},$$

нега-двійкові цифри τ_k якої є незалежними і мають розподіли:

$$P\{\tau_k = i\} = p_{ik}, i \in \{0;1\},$$

має експоненціальний розподіл зі щільністю $f(x) = \frac{\beta}{e^\beta - 1} \cdot e^{\beta x}, \ -\infty < \beta < \infty,$ *якщо*

$$p_{0k} = \begin{cases} (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при непарних} \, k, \\ 1 - (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при парних} \, k. \end{cases}$$

2. Якщо випадкова величина X має експоненціальний розподіл на відрізку $\left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ з функцією розподілу

$$F_X(x) = \frac{1}{e^\beta - 1}\left(e^{\beta(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3})} - 1\right), \qquad -\infty < \beta < +\infty,$$

то цифри ϕ_k у представленні X нега-двійковим дробом $\Delta^{\overline{2}}_{\phi_1\phi_2\ldots\phi_k\ldots}$ є незалежними випадковими величинами з розподілами

$$P\{\phi_k = 0\} = \begin{cases} (1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & при\ непарних\ k, \\ 1-(1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & при\ парних\ k; \end{cases}$$

$$P\{\phi_k = 1\} == \begin{cases} 1-(1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & при\ непарних\ k, \\ (1+e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & при\ парних\ k. \end{cases}$$

Теорема 2.2 *Неперервний розподіл випадкової величина* τ *є:*

1) абсолютно неперервним, якщо існує $n_0 \in \mathrm{N}$ *таке, що для всіх* $n \geq n_0$ *має місце рівність* $a_n = 1$*, і виконується умова:*

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} - p_{0k}\right)^2 < \infty; \tag{4}$$

2) чисто сингулярним в решті випадків, тобто коли $L = \infty$ *або нерівність* $a_n \neq 1$ *виконується нескінченну кількість разів.*

Теорема 3.3 *Множина атомів дискретного розподілу випадкової величини* τ *є хвостовою множиною і складається з точок виду*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon_n}{A_n}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n \in \{0,1\},$$

для яких $p_{\varepsilon_n n} \neq 0$ *та існує таке* $n_0 \in N$*, що для всіх* $k \geq n_0$ *виконуються рівності* $p_{\varepsilon_k k} = \max\{p_{0k}, p_{1k}\}$.

Враховуючи тополого-метричні властивості спектра розподілу випадкової величини τ, встановлено справедливість наступного твердження.

Теорема 4.4 *Якщо добуток (2) розбігається до нуля і* $a_n \neq 1$ *для нескінченної множини значень* n*, то розподіл* τ *є сингулярним розподілом канторівського типу (його спектр є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега).*

Для характеристичної функцією $f_X(t)$ випадкової величини X, яка є, згідно з означенням, математичним сподівання комплекснозначної випадкової величини e^{itX}, відомо, що величина

$$L_X = \varlimsup_{|t|\to\infty} | f_X(t) |$$

дорівнює: 1 для дискретно розподіленої випадкової величини X, 0 для абсолютно неперервно розподіленої випадкової величини X; або належить відрізку $[0;1]$ для сингулярних розподілів. Таким чином поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності дозволяє зробити деякі висновки про структуру розподілу відповідної їй випадкової величини, зокрема про близькість сингулярного розподілу до дискретного чи абсолютно неперервного розподілу.

Теорема 5.5 *1. Якщо* $a_n = 1$ *для всіх* $n > n_0$*, то рівність* $L_\tau = 0$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $\lim_{k\to\infty} p_{1k} = \frac{1}{2}$.

2. Якщо $a_n \neq 1$ *для нескінченної множини значень* n*, то* $L_\tau > 0$.

Теорема 6.6 *Якщо для* $n \geq n_0$ *і всіх* $k > n$ *виконується нерівність*

$$\frac{k!}{n!} \le (a_n + 1)a_{n+1}(a_{n+1} + 1)\dots(a_{k-1} + 1)a_k, \quad (5)$$

то має місце рівність $L_\tau = 1.$

Наслідок 1.7 *Якщо* $a_{n+1} > a_n$ *для всіх* $n \in \mathrm{N},$ *то має місце рівність* $L_\tau = 1.$

У цьому пункті також вивчається випадок однакової розподіленості випадкових величин τ_k, зокрема при $a_n = 1$ для всіх n більших деякого n_0 отримано умови кускової рівномірності розподілу τ .

Розглянемо випадкову величину

$$\eta = \frac{\eta_1}{a_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\eta_n}{a_1(a_1+1)\dots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},$$

де (η_n) – послідовність випадкових величин, які набувають двох значено 0 та 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ і матрицею перехідних ймовірностей

$$\| p_{ik} \| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}, \textit{ тобто } P\{\eta_{k+1} = j / \eta_k = i\} = p_{ij}.$$

Теорема 7.8 *Для того щоб розподіл випадкової величини* η *мав атоми, необхідно, щоб матриця перехідних ймовірностей* $\| p_{ik} \|$ *містила хоча б один нуль.*

Теорема 8.9 *Якщо матриця перехідних ймовірностей містить рівно один нуль, то розподіл в.в.* η *є дискретним або чисто неперервним (неатомарним), причому дискретним, якщо* $p_{ij} = 0$ *при* $i \ne j$, *і неперервним, якщо* $p_{ii} = 0,$ $i \in \{0;1\},$ *в останньому випадку розподіл* η *є сингулярно неперервним розподілом канторівського типу.*

Лема 1.10 *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $\| p_{ik} \|$ *має два нулі, то розподіл є чисто дискретним.*

Теорема 9.11 *Якщо матриця перехідних ймовірностей* $\| p_{ik} \|$ *не містить нулів, то розподіл* η *є неперервним, причому*

1) сингулярним розподілом канторівського типу, якщо $a_n \ne 1$ *нескінченну кількість разів;*

2) кусково рівномірним, якщо $a_n = 1$ *для всіх* n, *більших деякого* n_0, *і матриця перехідних ймовірностей має вигляд*

$$\| p_{ik} \| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Розподіли випадкових величин з незалежними елементами розкладів в знакозмінні ряди люрота

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta^{\tilde{L}}_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}, \quad 6)$$

де (ξ_k) – послідовність незалежних випадкових величин, причому ξ_k набуває значень $1,2,\dots,i,\dots$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{ik}, \dots$ відповідно

($p_{ik} \geq 0,\ p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{ik} + \ldots + = 1\ \forall k \in N$), яку ми називаємо випадковою величиною з незалежними $\tilde{L}$ -символами.

Теорема 10.12 *Випадкова величина ξ з незалежними $\tilde{L}$ -символами має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{m} p_{mk} > 0. \tag{7}$$

Причому у випадку дискретності множина атомів розподілу випадкової величини ξ складається з точки x_0, де $p_{a_k(x_0)k} = \max_m \{p_{mk}\}\ \ \forall k \in \mathrm{N}$, і всіх точок $x \in (0,1)$, у яких $p_{a_k(x)k} > 0$ та існує таке $m \in N$, що $a_j(x) = a_j(x_0)$ при $j \geq m$.

Теорема 11. 13*Неперервна випадкова величина ξ з незалежними $\tilde{L}$ -символами має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярно неперервний розподіл, причому абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{p_{mk}}{m(m+1)}} \right) > 0. \tag{8}$$

Наслідок 2.14 *Неперервний розподіл випадкової величини ξ є чисто сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли добуток (8) – розбіжний.*

Теорема 12.15 *Сингулярний розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом:*

1) *С-типу тоді і тільки тоді, коли розбігається нескінченний добуток*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i:p_{ik}>0} \frac{1}{i(i+1)}; \tag{9}$$

2) *S -типу тоді і тільки тоді, коли матриця $\| p_{ik} \|$ має скінченну кількість стовпців, які містять нулі;*

3) *K -типу тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток (9) збігається, а матриця $\| p_{ik} \|$ має нескінченну кількість стовпців, які містять нулі.*

Фрактальні властивості розподілу частково відображають наступні твердження.

Лема 2.16 *Графік Γ функції розподілу є N -самоафінною множиною простору R^2, причому*

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_i(\Gamma), \quad де \quad \varphi_i : \begin{cases} x' = \dfrac{1-x}{i(i+1)} + \dfrac{1}{i+1}, \\ y' = p_i(1-y) + \beta_i. \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=i+1}^{\infty} p_j, & при \quad i = 2m-1, \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} p_j, & при \quad i = 2m, m \in N. \end{cases}$$

Теорема 13.17 *Для того щоб функція розподілу випадкової величини ξ_0 з незалежними однаково розподіленими $\tilde{L}$ -символами зберігала розмірність Хаусдорфа-Безиковича, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $i \in \mathrm{N}$ виконувалась рівність $p_i = \dfrac{1}{i(i+1)}$.*

3. Випадкові знакозмінні ряди Люрота, елементи яких утворюють ланцюг Маркова

Розглянемо випадкову величину

$$\theta = \frac{1}{\theta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\theta_1(\theta_1+1)\ldots\theta_{n-1}(\theta_{n-1}+1)\theta_n} \equiv \Delta^{\widetilde{L}}_{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\ldots},$$

що має нескінченне $\widetilde{L}$ -зображення, елементи якого є випадковими величинами θ_n , де (θ_n) – послідовність дискретно розподілених випадкових величин, які набувають натуральних значень $1,2,\ldots,m\ldots$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_1, p_2,\ldots, p_m,\ldots$ і матрицею перехідних ймовірностей $\| p_{ik} \|$.

Теорема 14.18 *Розподіл в. в.* θ *має атоми тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність натуральних чисел* $(a_1, a_2,\ldots, a_k,\ldots)$*, що*

$$H(a_n) \equiv p_{a_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{a_k a_{k+1}} > 0.$$

Точковим спектром розподілу випадкової величини θ *є множина*

$$D_\theta = \{x : x = \Delta^{\widetilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, H(a_n(x)) > 0\}.$$

Наслідок 3.19 *Розподіл випадкової величини* θ *є неперервним, тобто ймовірнісна міра кожної одноточкової множини дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності натуральних чисел* (a_k) *виконується рівність* $H(a_n) = 0.$

Теорема 15.20 *Якщо всі елементи матриці перехідних ймовірностей* $\| p_{ik} \|$ *є одиницями або нулями, то розподіл випадкової величини* θ *є чисто дискретним з єдиним атомом у кожному циліндрі першого рангу, маса якого дорівнює відповідній початковій ймовірності, зокрема:*

1) якщо $p_{jj} = 1$ *для всіх* $j \in \mathrm{N}$*, то точковий спектр є множиною точок виду* $\Delta^{\widetilde{L}}_{(j)}$*;*

2) якщо $p_{jk} = 1$ *для всіх* $j \in \mathrm{N}$ *та деякого фіксованого* $k \in \mathrm{N}$*, то точковий спектр є множиною точок виду* $\Delta^{\widetilde{L}}_{j(k)}$*;*

3) якщо $p_{j(j+k)} = 1$ *для всіх* $j \in \mathrm{N}$ *та деякого фіксованого* $k \in \mathrm{N}$*, то точковий спектр є множиною точок виду* $\Delta^{\widetilde{L}}_{j[j+k][j+k][j+2k][j+2k]\ldots}$.

У роботі знайдено вираз функції розподілу в. в. θ.

Лема 3.21 *Якщо існує таке* $m \in \mathrm{N}$*, що* $p_{jj} = 1$, $p_{[m+i]j} = 0$ *для всіх* $j \le m$ *і* $\prod_{i=1}^{\infty} \max_k \{p_{[m+i][m+k]}\} = 0$ *для всі* $k \in \mathrm{N}$*, то функція розподілу випадкової величини* θ *має наступну лебегівську структуру*

$$F_\theta(x) = pF_d(x) + qF_c(x), \quad де \;\; q = 1 - p, \tag{10}$$

$$p = \sum_{j=1}^{m} p_j,\; F_d(x) = \frac{1}{p} \sum_{j: x_j < x} p_j,\; F_c(x) = \frac{1}{q}\left(F_\theta(x) - pF_d(x)\right).$$

Таким чином, розподіл випадкової величини θ може бути чисто дискретним, чисто неперервним і може бути сумішшю дискретного і неперервного.

Теорема 16.22 *Якщо матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль, то спектр розподілу випадкової величини θ має нульову міру Лебега, тобто розподіл є сингулярним.*

Наслідок 4.23 *Якщо елементи матриці перехідних ймовірностей $\| p_{ik} \|$ відокремлені від одиниці і вона містить принаймні один нуль, то розподіл випадкової величини θ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Теорема 17.24 *Якщо $p_{ii} > 0, \quad p_{i(i+1)} > 0$ і $p_{ii} + p_{i(i+1)} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, то спектр розподілу випадкової величини θ є аномально фрактальною множиною, тобто його розмірність Хаусдорфа-Безиковича дорівнює нулю.*

Список використаних джерел

1. Хворостіна Ю. В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – №10. – С.14–28.
2. Хворостіна Ю. В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – №11. – С.102–118.
3. Хворостіна Ю. В. Випадкові неповні суми знакозмінного ряду Люрота, доданки якого утворюють однорідний ланцюг Маркова / Ю. В. Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – №12. – С.37–46.
4. Хворостіна Ю. В. Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами / М.В. Працьовитий, Ю.В.Хворостіна // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – №15. – С.74–86.
5. Khvorostina Yu. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements / M. Pratsiovytyi, Yu. Khvorostina // Random Oper. Stoch. Equ. – 2013. – Vol. 21, no. 4. – P. 385–401.
6. Хворостіна Ю. В. Випадкова величина, символи -зображення якої є випадковими величинами з марковською залежністю / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Вид-во ТЙіМС. – 2014. – Випуск 91. – С.143-153.
7. Khvorostina Yu. The random incomplete sums of alternating Luroth series with elements forming a homogeneous Markov chain / Yu. Khvorostina // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2013. – P. 100.
8. Хворостіна Ю. В. Спектральні властивості розподілу випадкових знакозмінних рядів Люрота, елементи яких утворюють однорідний ланцюг Маркова / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня – 5 липня 2014 р.: Тези доповідей. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, 2014. – С.168-169.

Анотація. Хворостіна Ю.В. Концептуальні основи дослідження розподілів випадкових величин, пов'язаних зі знакозмінними рядами Люрота.

Досліджується лебегівська структура розподілу (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент), спектральна структура сингулярного розподілу (належність розподілу до канторівського, салемівського чи квазіканторівського типу), тополого-метричні та фрактальні властивості спектра (мінімальної замкненої множини, на якій зосереджений розподіл) випадкових величин, які є: 1) сумою знакозмінного ряду Люрота, натуральні елементи якого є випадковими величинами з наперед заданими дискретними розподілами (вивчаються випадки незалежності та марковської залежності); 2) випадковими неповними сумами заданих знакозмінних рядів Люрота, коефіцієнти яких є незалежними випадковими величинами або випадковими величинами, які утворюють ланцюг Маркова. Для випадкової неповної суми заданого ряду з незалежними коефіцієнтами знайдено оцінку модуля характеристичної функції та досліджено його поведінку на нескінченності.

Ключові слова: знакозмінний ряд Люрота, $\tilde{L}$-зображення, лебегівська структура розподілу, спектральна структура сингулярного розподілу, розмірність Хаусдофа-Безиковича носія, нескінченні згортки Бернуллі, неповна сума ряду, модуль характеристичної функції випадкової величини.

Аннотация. Хворостина Ю.В. Концептуальные основы исследования распределения случайных величин, связанных с знакопеременными рядами Люрота.

Исследуется лебеговская структура (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярно непрерывной компонент), спектральная структура сингулярного распределения (является распределением канторовского, салемовского или квазиканторовского типа), тополого-метрические и фрактальные свойства спектра (минимальное замкнутое множество, на котором сосредоточено распределение) случайных величин, которые есть: 1) суммой знакопеременного ряда Люрота, натуральные елементы которого есть случайными величинами с наперед заданным распределением (изучаются случаи независимости и марковской зависимости); 2) случайными неполными суммами заданого знакопеременного ряда Люрота, коэффициенты которого есть независимыми случайными величинами или случайными величинами, которые образуют цепь Маркова. Для случайной неполной суммы заданого ряда с независимыми коэффициентами найдено оценку модуля характеристической функции и исследовано его поведение на бесконечности.

Ключевые слова: знакопеременный ряд Люрота, $\tilde{L}$-представление, лебеговская структура распределения, спектральная структура сингулярного распределения, размерность Хаусдорфа-Безиковича носителя, бесконечные свертки Бернулли, неполная сумма ряда, модуль характеристической функции случайной величины.

Abstract. Khvorostina Yu. Conceptual framework for investigating the distribution of the random variables that are associated with alternating Lüroth series.

We consider the properties of the distributions of the sums of the random alternating Lüroth series. We study four classes of random variables. In the first class the random variables are represented by the alternating Lüroth series with independent elements. The second class is the random alternating Lüroth series which elements are random variables with Markovian dependence. The third class is the random subsums of given series with the *independence random coefficients. The fourth class is the random subsums of given series which coefficients form a homogeneous Markov chain. The content of discrete, absolutely continuous and singular continuous components in Lebesgue structure of distributions of these random variables is studied. In addition, the belonging of the singular distribution to Cantor, Salem or quasi-Cantor type is investigated. The topological, metric and fractal properties of the minimal closed support of the distribution of random variables are described. We proved the purity of the distribution of the first three classes of random variables. The conditions of belonging to each pure type of probability distribution are received. We give examples of the pure probability distributions and their mixtures for the fourth class. The problem of the spectral structure of the singular distribution of random variables, that represented by the alternating Luroth series with independent elements, are fully solved. The conditions, under which the distribution of other random variables, belong to the singular distribution of Cantor type are received.*

*Keywords**:** alternating Luroth series, $\tilde{L}$-expansion, Lebesgue structure of probability distribution, spectrums structure of singular distribution, Hausdorff-Besicovitch dimension, infinite Bernoulli convolution, subsums of the series, modulus of the characteristic function of the random variable.*